

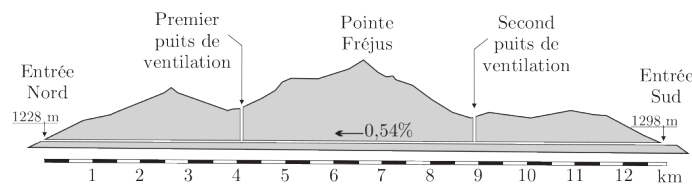
Travail demandé

à rendre le 06/12/2024

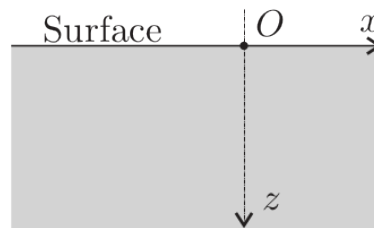
Chaque étudiant rend une copie même s'il n'est pas interdit de chercher les exercices en groupe.

Problème I - Autour du Tunnel de Fréjus*Ce sujet est extrait de l'épreuve de Mines-Pont PC 2016.*

On souhaite étudier le comportement thermique des roches entourant le tunnel de Fréjus, qui traverse les Alpes cotiennes sur 13 km entre la France et l'Italie. On s'intéresse en particulier aux variations de température saisonnières des roches, ainsi qu'à l'influence du chauffage radioactif de la croûte terrestre, et celle du relief régional, sur le profil thermique de ces roches.

**Fig. 1** – Vue en coupe du tunnel de Fréjus.

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ 30°C . On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique κ , de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c_P . Dans un premier temps, on considère la surface plane et horizontale. Elle est soumise à une variation de température extérieure $T(z = 0, t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$.

**Fig. 2** – Milieu semi-infini.**Variations thermiques saisonnières :**

- Rappeler la loi empirique de Fourier en justifiant son signe. Construire un bilan énergétique sur une tranche mésoscopique de roche, de section S et d'épaisseur dz , entre les dates t et $t + dt$. Pourquoi se place-t-on à l'échelle mésoscopique ? Établir alors l'équation de la chaleur à une dimension dans la roche, et préciser l'expression de la diffusivité thermique qui y apparaît.
- On cherche des solutions de la forme $\underline{T}(z, t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$ vérifiant la condition aux limites $T(z = 0, t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$. Interpréter cette forme de solution. Déterminer la relation de dispersion correspondante, et en déduire l'expression de $\underline{k} = k' + ik''$, avec $k' > 0$. Préciser le sens physique de k' et k'' . Déterminer alors l'expression de $T(z, t)$.

- Calculer la profondeur z_e à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de plus de 1% de θ_0 . Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus? Il est situé à 1.7 km de profondeur dans les roches granitiques de masse volumique $\rho = 2.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, de capacité thermique massique $c_P = 8.50 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, et de conductivité thermique $\kappa = 3.00 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. On prendra $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$ et $T_0 = 20^\circ\text{C}$.
- Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_e ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol?

Température élevée d'origine géophysique :

La température moyenne de 30°C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est $L_c = 45.0 \text{ km}$. Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.

Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-z/H}$, avec $H = 10.0 \text{ km}$ et $\mathcal{P}_0 = 2.50 \mu\text{W}/\text{m}^3$. La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface $I_{c/m}$ entre la croûte et le manteau, ce dernier génère un flux surfacique constant de valeur $j_m = 35.0 \text{ mW}/\text{m}^2$. En surface, le flux surfacique mesuré en France continentale varie entre 50 et $130 \text{ mW}/\text{m}^2$, comme le montre la figure 4.

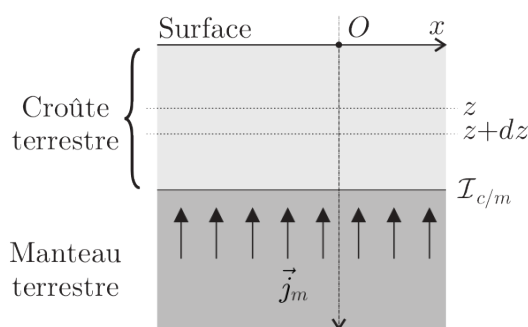


Fig. 3 – Modèle géophysique.

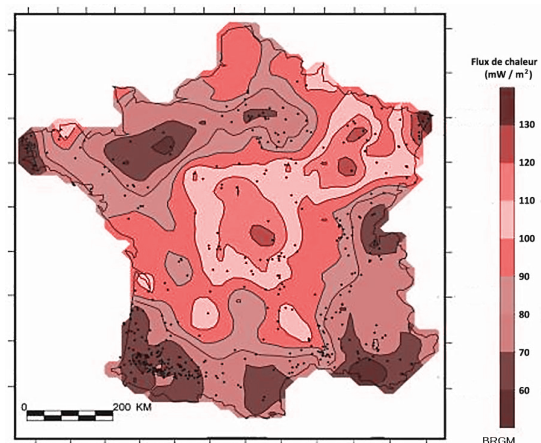


Fig. 4 – Carte du flux thermique en France métropolitaine (BRGM, SIG Mines France, 1989).

- Effectuer, en régime stationnaire, le bilan enthalpique d'une tranche de croûte terrestre de surface S , comprise entre z et $z + dz$. En déduire l'expression de la densité de flux thermique $\vec{j}_Q(z)$ en fonction de \mathcal{P}_0 et j_m .
- Exprimer et calculer le flux surfacique j_s en $z = 0$. Application numérique et commentaire.
- Déterminer le profil de température $T(z)$, en fonction notamment de \mathcal{P}_0 , H , L_c , j_m et $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$ la température moyenne de surface en $z = 0$.
- Dans l'expression de $T(z)$, comparer les deux termes proportionnels à z et simplifier $T(z)$. Évaluer la température au sein du tunnel de Fréjus à 1.7 km de profondeur.

Prise en compte du relief :

Afin d'étudier l'impact du relief sur la distribution de température dans le massif montagneux du tunnel de Fréjus, on suppose dans un premier temps que la surface extérieure est un plan d'équation $z = 0$, qui possède une dépendance spatiale en x que l'on modélise par la relation $T(x, z = 0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$, avec une période spatiale $\lambda = 10.0 \text{ km}$.

- On suppose pour cette question qu'il n'y a pas de source d'énergie d'origine radioactive ou mantellique dans la roche. Donner l'équation différentielle satisfaite par $T(x, z)$ en régime stationnaire. En supposant les variables x et z séparables, on écrit le profil thermique dans le massif sous la forme $T(x, z) =$

- $f(x)g(z) + \text{Cste}$. Déterminer alors la solution $T(x, z)$ qui respecte la condition aux limites $T(x, z = 0)$ et qui demeure finie aux grandes profondeurs lorsque $z \rightarrow \infty$.
10. Toujours pour une surface extérieure plane d'équation $z = 0$, et en utilisant la linéarité de l'équation satisfaite par la température, déterminer $T(x, z)$ en tenant compte des sources d'énergie radioactive et mantellique.
11. On considère désormais que la topographie de la surface peut être représentée par l'équation $h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. La température de la surface $T_s(x) = T(x, z = h(x))$ sera prise égale à celle de l'air ambiant, et sera modélisée par un gradient thermique constant dans l'atmosphère : $T_s(z) = \theta_0 + \beta z$.
- (a) En effectuant un développement limité à l'ordre 1, exprimer la condition aux limites $T(x, z = 0)$ en fonction de h , $T(x, z = h)$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$. Exprimer $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$ en fonction notamment du flux de surface j_s .
- (b) En tenant ainsi compte du relief, réécrire la condition aux limites $T(x, z = 0)$ utilisée en question 10, en fonction notamment de θ_0 , β et j_s . Identifier alors la température T_1 des questions précédentes en fonction de j_s , h_0 et κ .
- (c) Montrer finalement que, si l'on tient compte du relief et des sources d'énergie souterraines, la distribution stationnaire de température dans le massif rocheux s'écrit :

$$T(x, z) = \theta_0 + c_1 z + c_2 \left(1 - e^{-z/H}\right) + c_3 h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-z/\delta}$$

où c_1 , c_2 , c_3 et δ sont des constantes à déterminer.

Problème II - La marche du berger landais sur échasses

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique CCINP MPI 2024.

Afin de parcourir de longues distances dans la lande et pour surveiller leurs troupeaux de moutons, les bergers landais utilisaient des échasses (**photo 3**). Les premiers témoignages de cette pratique remontent au XVIII^e siècle. Celle-ci a progressivement disparu jusqu'au début du XX^e siècle avec l'extension de la forêt qui marqua la fin du pastoralisme. De nos jours, des groupes folkloriques d'échassiers s'attachent à perpétuer et à faire revivre ce patrimoine culturel landais.



Photo 3 - Berger landais surveillant son troupeau de moutons du haut de ses échasses (<https://photoshistoriques.info/lechasse-la-marche-des-bergers-de-france-prairies-1843-1937>)

Les échasses sont constituées de deux pièces de bois : l'escasse ("jambe" en patois landais) et le *paouse pé* ("repose pied"), fixé sur l'escasse, le plus souvent à une hauteur par rapport au sol comprise entre 90 cm et 1,20 m. Deux lanières de cuir sont prévues pour que l'échassier attache son pied et sa jambe à l'échasse.

On se propose d'étudier la marche sur échasses en établissant quels paramètres mécaniques sont modifiés par rapport à la marche ordinaire et de déterminer s'il est pertinent de qualifier cette pratique de "marche à pied augmentée".

Commençons par décrire la marche ordinaire : la marche est une activité complexe, nécessitant l'action coordonnée de 48 muscles de contrôle de la position du tronc et des membres inférieurs afin de permettre au marcheur de se déplacer vers l'avant avec un rendement optimal.

Le cycle de la marche comprend deux phases pour chaque jambe : une phase de double contact et une phase d'oscillation, illustrées en **figure 6**. Les schémas en **figure 7a** et **7b** précisent les notations utiles à la description des phases de double contact et d'oscillation gauche.

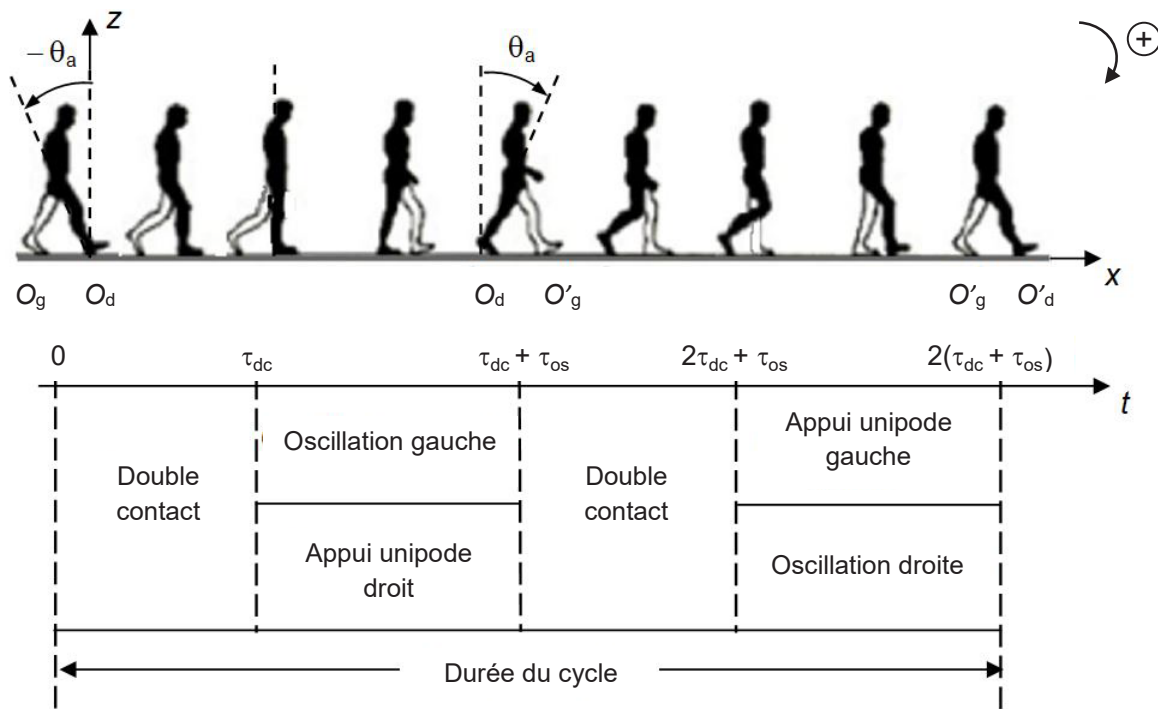


Figure 6 - Phases du cycle de la marche

La description du mouvement est menée dans le référentiel du sol supposé galiléen.

Phase de double contact

À la date $t = 0$, la jambe droite prend appui sur le sol, en O_d (elle vient de terminer son oscillation) (**figures 6 et 7a**); elle est immobile à cet instant (sa vitesse angulaire de rotation est nulle : $\Omega(0) = 0$) et se trouve inclinée d'un angle $\theta = -\theta_a$ par rapport à la verticale ascendante $O_d z$. Grâce à l'action des muscles, elle amorce alors un mouvement de rotation à la vitesse angulaire variable $\Omega(t)$ autour de l'axe $O_d y$ perpendiculaire au plan de figure ($xO_d z$), tandis que la jambe gauche, elle aussi en appui sur le sol, en O_g , transfère le poids du corps sur la jambe droite : durant cette phase, de durée τ_{dc} , l'énergie cinétique des deux jambes augmente et le centre de masse du buste s'élève. À la date $t = \tau_{dc}$, la jambe droite passe par la position verticale, tandis que la jambe gauche, libérée du poids du corps, quitte son appui au sol.

Phase d'oscillation gauche

À partir de la date $t = \tau_{dc}$ et jusqu'à la date $t = \tau_{dc} + \tau_{os}$, la jambe gauche, libérée de son appui au sol, opère, sous la seule action de son poids, une oscillation pendulaire de durée τ_{os} autour de l'axe de son pivot fémoral $F_g y$ (**figure 7b**) (on suppose que la présence du sol ne gêne pas l'oscillation). Cette phase est concomitante de la phase d'appui unipode droit (nommée ainsi car seule la jambe droite est alors en appui au sol et poursuit sa rotation autour de $O_d y$ jusqu'à la position $\theta = \theta_a$ représentée en pointillés sur la **figure 7a**).

Appuis au sol et définition du pas

Après son appui au sol au point O_g , la jambe gauche reprend appui au sol en O'_g , à la distance $2p$ devant O_g et à la distance p devant O_d : $p = O_g O_d = O_d O'_g$ définit **le pas** de la marche.

Le cycle se poursuit alors en intervertissant les rôles des jambes gauche et droite.

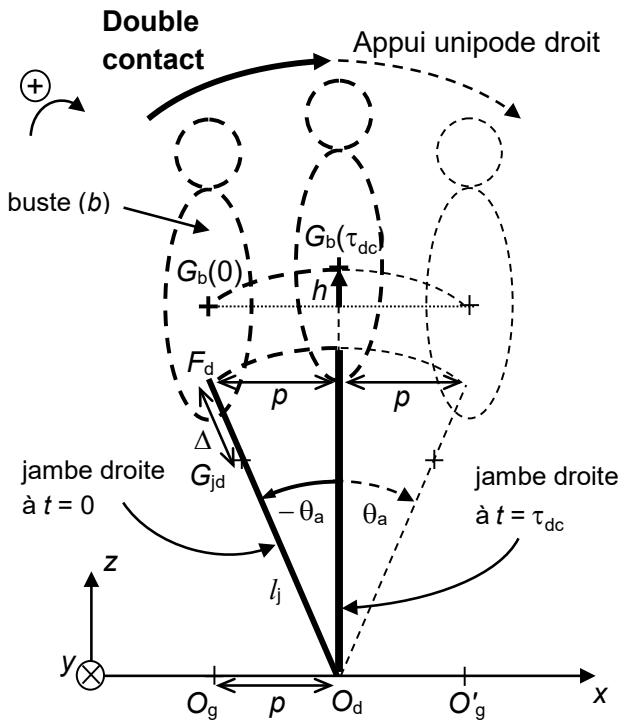


Figure 7a - Phase de double contact

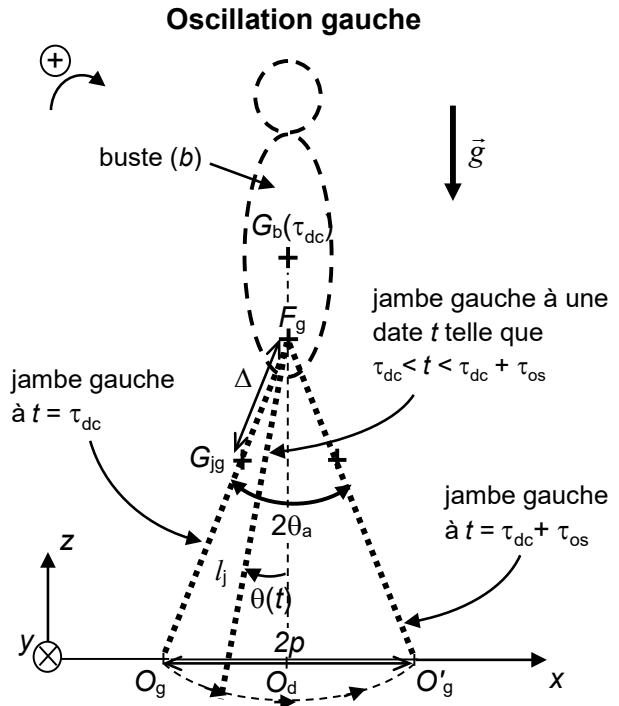


Figure 7b - Phase d'oscillation gauche

On adopte le modèle mécanique simplifié suivant :

Chaque jambe est modélisée par une tige solide, de longueur l_j , de masse m_j , de centre de masse G_j et d'extrémité F (pivot fémoral). Ces points sont notés G_{jd} et F_d pour la jambe droite (j_d), et G_{jg} et F_g pour la jambe gauche (j_g). Le buste (b) est modélisé comme un solide de masse m_b et de centre de masse G_b . L'ensemble $(\Sigma) = \{(j_d), (j_g), (b)\}$ constitue le marcheur.

On note :

- $\Delta = F_d G_{jd} = F_g G_{jg}$.
- $\vec{g} = -g \vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur.
- J_F le moment d'inertie de (j_d) (respectivement de (j_g)) par rapport à l'axe $F_d y$ (respectivement $F_g y$).
- J_O le moment d'inertie de (j_d) (respectivement de (j_g)) par rapport à l'axe $O_d y$ (respectivement $O_g y$).

III.1 - Étude de la phase d'oscillation gauche

Soit $\theta(t)$ la position angulaire de (j_g) par rapport à la verticale ascendante (**figure 7b**).

Q14. En appliquant le théorème du moment cinétique à (j_g) dans le référentiel du buste supposé galiléen, établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ pendant cette phase d'oscillation.

Q15. Dans l'approximation des petits angles, exprimer en fonction de m_j , J_F , g et de Δ , la pulsation ω_{os} et la durée τ_{os} de cette phase d'oscillation.

III.2 - Étude de la phase de double contact

Afin d'évaluer le coût énergétique de la marche, on adopte les quatre hypothèses suivantes lors de la phase de double contact :

- Le buste est animé d'un mouvement de translation quasi-uniforme, de vitesse moyenne $\vec{V}_{dc} \approx V_{dc} \vec{u}_x$ avec $V_{dc} = \frac{\rho}{\tau_{dc}}$ (la composante verticale de \vec{V}_{dc} est donc négligée).
- Les variations d'énergie potentielle de pesanteur de (j_d) et de (j_g) sont négligées.
- Les variations d'énergie cinétique de (j_d) et de (j_g) sont supposées égales.
- Le mouvement de rotation de (j_d) autour de $O_d y$ s'effectue à la vitesse angulaire variable $\Omega(t)$, avec $\Omega(t=0) = 0$.

Q16. On note $h = z_{G_b(\tau_{dc})} - z_{G_b(0)}$ la variation d'altitude du point G_b entre les instants de dates $t = 0$ et $t = \tau_{dc}$ (**figure 7a**). Exprimer la variation $\Delta \mathcal{E}$ de l'énergie mécanique de (Σ) entre ces deux instants, en fonction de J_O , $\Omega(\tau_{dc})$, m_b , g et de h .

III.3 - Coût énergétique et pas optimal de la marche ordinaire

Q17. En supposant quasi-constante la puissance \mathcal{P} fournie par les muscles pendant la phase de double contact, on évalue \mathcal{P} par $\mathcal{P} = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\tau_{dc}}$.

Rappeler l'énoncé du théorème de la mécanique dont découle cette relation d'évaluation de \mathcal{P} .

Q18. Avec $h \approx \frac{\rho^2}{2l_j}$ (expression approchée de h valable pour les petits angles θ_a) et en supposant des conditions de marche telles que $\Omega(\tau_{dc}) = \omega_{os}$, avec ω_{os} la pulsation trouvée à la question **Q15**, montrer que $\mathcal{P} = \left(\frac{J_O m_j \Delta}{J_F \rho} + \frac{m_b \rho}{2l_j} \right) g V_{dc}$.

Q19. Obtenir l'expression du pas p_{opt} qui minimise \mathcal{P} .

Q20. Application numérique :

Avec $l_j = 1$ m, $m_j = 10$ kg, $m_b = 60$ kg, calculer p_{opt} dans le cas d'une jambe à répartition de masse uniforme, pour laquelle on a alors $\Delta = l_j / 2$ et $J_O = J_F$.

III.4 - Pas optimal avec des échasses

Soit maintenant un berger monté sur ses échasses. Chacune d'elles est modélisée comme une tige de masse négligeable, de longueur l^* , solidarisée à la jambe et formant avec elle une "jambe équivalente" de longueur $l_j + l^*$. On note E le point de contact entre le sol et l'échasse et J_E^* le moment d'inertie, par rapport à l'axe Ey , de la "jambe équivalente".

Q21. a) Parmi les paramètres intervenant dans l'expression de p_{opt} obtenue en **Q19**, indiquer lesquels sont inchangés par rapport au cas sans échasses et lesquels sont à modifier. On précisera ces modifications.

- b) En déduire l'expression de ρ_{opt}^* , puis donner le rapport $\frac{\rho_{\text{opt}}^*}{\rho_{\text{opt}}}$ en fonction de $\frac{J_E^*}{J_O}$ et de $\frac{l^*}{l_j}$.

Dans le **tableau 1** figurent les expressions des moments d'inertie d'une jambe à répartition de masse uniforme, sans ou avec échasse.

	Jambe seule (contact avec le sol en O)	Jambe avec échasse (contact avec le sol en E)
Moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation au sol	$J_O = \frac{m_j}{3} l_j^2$	$J_E^* = \frac{m_j}{3} (l_j^2 + 3l^* l_j + 3l^{*2})$

Tableau 1 - Moments d'inertie dans le cas d'une jambe à répartition de masse uniforme

- Q22. a)** Exprimer $\frac{\rho_{\text{opt}}^*}{\rho_{\text{opt}}}$ en fonction du seul rapport $\frac{l^*}{l_j}$ dans le cas d'une jambe à répartition de masse uniforme.
- b)** Calculer $\frac{\rho_{\text{opt}}^*}{\rho_{\text{opt}}}$ pour un berger adulte de longueur de jambe $l_j = 1$ m, monté sur des échasses de longueur $l^* = 1$ m.
- c)** Justifier si la durée de la phase oscillante est changée avec les échasses.
- d)** Des études statistiques ont montré, qu'une fois le pas optimal adopté, la vitesse moyenne de déplacement horizontal du marcheur sur un cycle est proportionnelle au pas optimal et à la pulsation de la phase oscillante.
- En déduire le rapport $\frac{V^*}{V}$ des vitesses de déplacement du marcheur avec et sans échasses. Commenter.

Problème III - La plateforme stabilisatrice Waverider

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique CCS MP 2022.

II La plateforme stabilisatrice

Le Waverider est muni d'un accéléromètre uniaxe qui mesure la projection de l'accélération \vec{a}_W de la bouée sur une direction particulière \vec{u}_z . Cette direction est liée à l'accéléromètre : si celui-ci se réoriente dans l'espace, le vecteur \vec{u}_z se modifie généralement et l'accéléromètre mesure la projection de \vec{a}_W sur une nouvelle direction. Cependant, afin d'accéder à la hauteur des vagues, ce sont les accélérations *verticales* qu'il convient de mesurer et il est donc impératif que la direction sensible de l'accéléromètre, définie par le vecteur \vec{u}_z , demeure en permanence colinéaire à l'accélération de la pesanteur \vec{g} . Il s'agit d'une véritable gageure, car l'accéléromètre est embarqué dans une bouée sujette à des mouvements complexes provoqués par les vagues. Pour maintenir fixe l'orientation de l'accéléromètre malgré ces mouvements perturbateurs, celui-ci est placé sur une plateforme stabilisatrice pendulaire. Ce dispositif, protégé par des brevets, est au cœur de la technologie Waverider. La figure 3 montre une photographie et donne une description sommaire de la plateforme stabilisatrice.

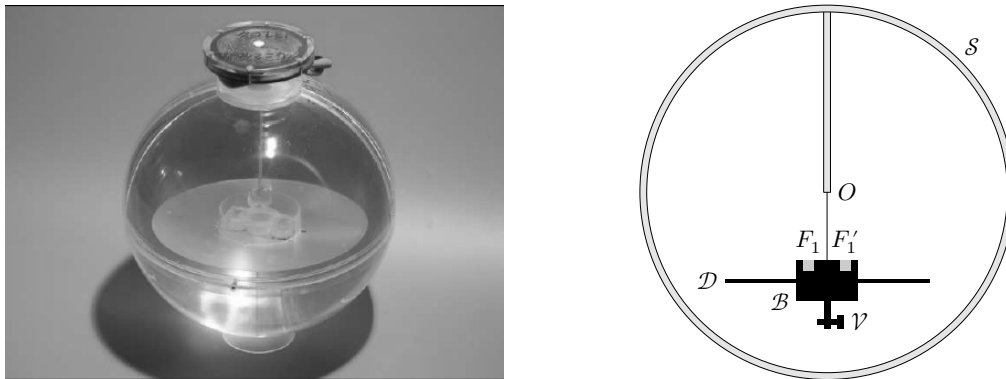


Figure 3 Plateforme stabilisatrice

La plateforme stabilisatrice est enfermée dans une sphère transparente \mathcal{S} (figure 3), elle-même placée dans la bouée. Attention à ne pas confondre la sphère \mathcal{S} et la coque de la bouée qui est, elle aussi, grossièrement sphérique.

L'accéléromètre (non représenté) est solidaire d'un bloc en plastique \mathcal{B} prolongé vers le bas par une tige du même matériau, elle-même traversée par une vis en métal \mathcal{V} que l'on peut enfoncer plus ou moins pour la déplacer de droite à gauche. Dans sa partie supérieure, le bloc est évidé sur deux régions F_1 et F'_1 et les cavités sont comblées avec un matériau moins dense. L'ensemble est fixé sur un disque \mathcal{D} constituant la plateforme proprement dite, puis suspendu par un fil très fin au centre O de la sphère \mathcal{S} , lui-même lié rigidement à la paroi sphérique par une tige. La sphère est enfin remplie d'un liquide judicieusement choisi.

II.A – Flottabilité

Le principe d'Archimède, dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T supposé galiléen, peut s'exprimer ainsi.

Soit un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur. Un corps immergé dans ce fluide subit de sa part des forces de pression dont la somme est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé (poussée d'Archimède). Cette poussée s'applique au centre de masse du fluide déplacé.

Q 14. On considère un solide homogène de masse volumique ρ et de volume V entièrement immergé dans un liquide de masse volumique ρ_ℓ en équilibre dans le champ de pesanteur. Par une analyse des forces qu'il subit, discuter la propension de ce solide à remonter vers la surface pour y flotter ou, au contraire, à couler vers le fond.

Q 15. Toujours soumis au champ de pesanteur, le liquide est dans cette question en équilibre dans un référentiel \mathcal{R} en translation rectiligne, d'accélération \vec{a}_e par rapport à \mathcal{R}_T . Comment faut-il modifier le principe d'Archimède ?

II.B – Horizontalité statique de la plateforme

Les éléments F_1 , F'_1 et \mathcal{V} ont pour rôle d'assurer l'horizontalité statique de la plateforme. Pour comprendre le principe du dispositif, on considère un système modèle Σ constitué de trois parties (figure 4) :

- un solide homogène S_0 de volume V_0 , de centre de masse G_0 , formé d'un matériau de masse volumique ρ_0 , modélisant le bloc en plastique et le disque \mathcal{D} ;
- un solide homogène S_1 de volume V_1 , de centre de masse G_1 et de masse volumique $\rho_1 < \rho_0$, modélisant F_1 et F'_1 ;
- un solide homogène S_2 de volume V_2 , de centre de masse G_2 et de masse volumique $\rho_2 > \rho_0$, modélisant la vis \mathcal{V} et les parties métalliques de l'accéléromètre.

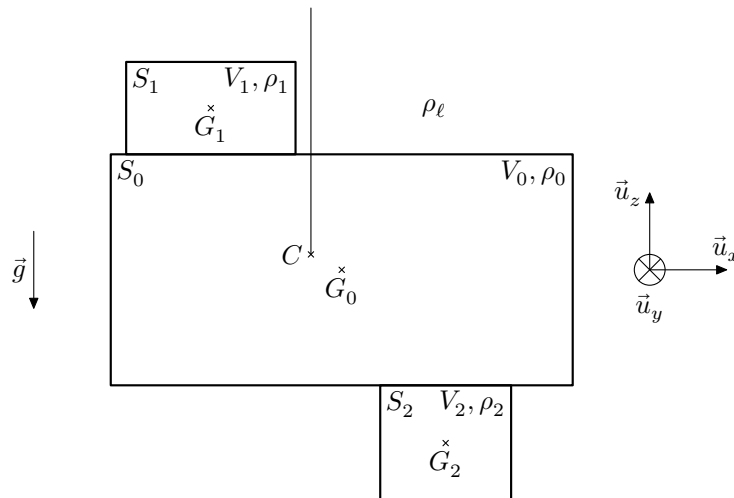


Figure 4 Modélisation de la plateforme par un système Σ en trois parties

L'ensemble est suspendu par un fil fixé en C et immergé dans le liquide, choisi de telle manière que sa masse volumique ρ_ℓ soit proche de ρ_0 . Dans cette sous-partie seulement, nous prendrons $\rho_\ell = \rho_0$ pour simplifier, bien qu'un léger écart existe entre ces deux valeurs. On se limite à une description bidimensionnelle dans le plan de la figure 4 et on envisage une possible inclinaison du système Σ par rotation autour de l'axe (C, \vec{u}_y) , le fil restant toujours vertical (il ne touche le solide S_0 qu'en C).

On note $\vec{\Pi}_0$ (respectivement $\vec{\Pi}_1$ et $\vec{\Pi}_2$) la poussée d'Archimède appliquée en G_0 (respectivement G_1 et G_2) que subirait le solide immergé S_0 (respectivement S_1 et S_2) en l'absence des deux autres solides (le liquide l'entourant donc totalement).

On admet que la poussée d'Archimède due au liquide sur le système Σ peut être remplacée par les trois forces $\vec{\Pi}_0$, $\vec{\Pi}_1$ et $\vec{\Pi}_2$.

Q 16. Exprimer la résultante \vec{R} et le moment $\vec{\Gamma}_C$ en C des forces de pression et de pesanteur que Σ subit en fonction des grandeurs judicieuses parmi ρ_ℓ , ρ_1 , ρ_2 , V_0 , V_1 , V_2 , $\overrightarrow{CG_0}$, $\overrightarrow{CG_1}$, $\overrightarrow{CG_2}$ et \vec{g} .

Q 17. Les sous-systèmes S_1 et S_2 procurent respectivement à Σ une propension à flotter ou à couler. À quelle condition ces effets antagonistes se compensent-ils ? Exprimer la réponse sous la forme d'une relation entre ρ_ℓ , ρ_1 , ρ_2 , V_1 et V_2 .

Q 18. La relation précédente est supposée satisfaite. Montrer que le moment en C des forces s'exerçant sur l'ensemble Σ s'exprime sous la forme

$$\vec{\Gamma}_C = M_m \overrightarrow{G_1 G_2} \wedge \vec{g}$$

et donner l'expression de M_m en fonction de ρ_ℓ , ρ_2 et V_2 .

Q 19. Proposer une situation électrostatique analogue à celle étudiée ici. En particulier, détailler cette analogie terme à terme pour la relation précédente.

Q 20. Dédurre de la relation précédente l'orientation prise par le vecteur $\overrightarrow{G_1 G_2}$ à l'équilibre stable de Σ . Vérifier la cohérence de la stabilité de l'équilibre à l'aide d'un ou de plusieurs dessins pertinents.

Q 21. En revenant au système réel de la figure 3, expliquer le rôle de la vis \mathcal{V} .

II.C – Oscillations du pendule et longueur effective

Dans cette sous-partie, on suppose la sphère \mathcal{S} et le point O fixes dans \mathcal{R}_T et on étudie un mouvement pendulaire de la plateforme \mathcal{D} dans le cadre d'un modèle simplifié :

- La plateforme et ses accessoires sont remplacés par un solide Σ_0 quasi ponctuel de volume V_0 et de masse volumique ρ_0 immergé dans le liquide de masse volumique $\rho_\ell < \rho_0$, suspendu en O par un fil souple de longueur ℓ et de direction indiquée par un angle θ (figure 5).
- On utilise encore le principe d'Archimède pour exprimer la résultante des forces du liquide sur le solide Σ_0 , malgré les mouvements de ceux-ci (on néglige donc notamment dans cette sous-partie toute force de frottement due au liquide sur le solide).
- On augmente l'inertie du solide Σ_0 pour tenir compte du fait qu'il entraîne dans son déplacement du liquide qui se trouve autour de lui : pour ce faire, on affecte à Σ_0 une « masse effective » m_{eff} *uniquement pour le calcul de ses éléments cinétiques (quantité de mouvement, moment cinétique, énergie cinétique)*. Cette masse effective est supposée constante et est bien supérieure à la masse réelle de la plateforme et de ses accessoires.

Attention : la « masse effective » n'intervient pas dans l'expression du poids de Σ_0 qui ne dépend que de sa masse réelle $\rho_0 V_0$.

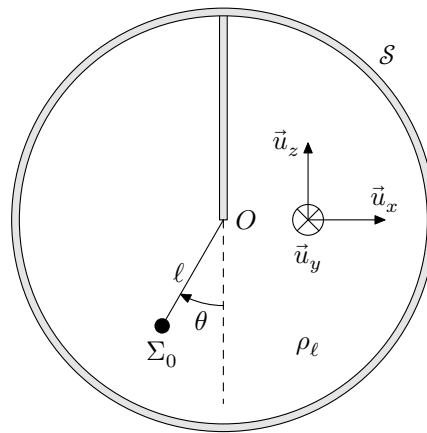


Figure 5 Modélisation de la plateforme en pendule simple (d'après l'orientation du vecteur \vec{u}_y , l'angle θ représenté sur cette figure est positif)

Q 22. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ dans l'approximation des petits angles. Identifier une pulsation propre ω_0 de la forme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell_{\text{eff}}}}$$

et donner l'expression de ℓ_{eff} en fonction de ℓ , m_{eff} et de la masse apparente $m_{\text{app}} = (\rho_0 - \rho_\ell)V_0$.

Q 23. L'auteur du brevet original estime que le volume de fluide entraîné par le pendule est égal à $20V_0$ de sorte que $m_{\text{eff}} = \rho_0V_0 + 20\rho_\ell V_0$. La masse volumique du liquide est de 1% inférieure à ρ_0 . Sous ces hypothèses, comparer la période propre T_0 du pendule à celle $T_{0\text{vide}}$ que l'on observerait en l'absence de liquide.

Q 24. Dans les brochures commerciales Datawell, on peut lire la phrase suivante : *La période propre d'oscillations de la plateforme est de l'ordre de 40 s, ce qui correspondrait à un pendule de 400 m.* Cette affirmation vous paraît-elle cohérente ? Peut-on estimer la longueur réelle ℓ ?

II.D – Effet stabilisateur

On rappelle que la sphère de la figure 3 est embarquée dans une bouée. Sous l'effet de la houle, son centre O subit, en plus des accélérations verticales à mesurer, des accélérations horizontales perturbatrices.

Comme dans la sous-partie II.C, on représente la plateforme par un pendule simple et on étudie ses oscillations, repérées par l'angle θ . On envisage une situation dans laquelle le point de fixation O subit, par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R}_T supposé galiléen, une accélération $\vec{a} = a(t)\vec{u}_x$. On raisonne dans le référentiel \mathcal{R}_S d'origine O et dont les axes sont parallèles à ceux de \mathcal{R}_T . La poussée d'Archimède et l'effet de masse effective interviennent comme dans la sous-partie précédente et on prend de surcroît en compte une force de frottement visqueux $\vec{F}_v = -\beta\vec{v}$ sur le solide Σ_0 de vitesse \vec{v} .

Q 25. En tenant compte de la question 15, donner l'expression de la poussée d'Archimède. Quelle autre force s'exerçant sur le pendule faut-il considérer pour rendre compte du mouvement accéléré de \mathcal{R}_S par rapport à \mathcal{R}_T ? Dans l'expression de cette force, on fera intervenir la masse réelle ρ_0V_0 de Σ_0 et non pas sa masse effective.

Q 26. Dans l'approximation des petits angles, démontrer que l'équation du mouvement du pendule est dorénavant de la forme

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{a(t)}{\ell_{\text{eff}}}$$

et donner l'expression du facteur de qualité Q en fonction de m_{eff} , β et ω_0 .

On procède à une étude de la réponse harmonique du pendule.

L'accélération $a(t)$ est de la forme $a(t) = \text{Re}(a_0 e^{j\omega t})$ et on pose $\theta = \text{Re}(\underline{\theta}_m e^{j\omega t})$.

Q 27. Exprimer $\underline{\theta}_m$ en fonction de a_0 , ℓ_{eff} , ω , ω_0 et Q .

On note θ_0 la valeur de $\underline{\theta}_m$ obtenue pour $\omega = 0$ puis on pose $\underline{H}(j\omega) = \underline{\theta}_m / \theta_0$.

Q 28. Donner l'expression de \underline{H} . À quel type de filtre une telle fonction de transfert est-elle associée ?

Q 29. Quelle expression \underline{H}_1 (en fonction de ω , g et ℓ) la fonction de transfert prendrait-elle si le pendule oscillait dans l'air, le liquide étant absent ? On néglige dans ce cas les effets de viscosité et tout autre phénomène dissipatif.

Le Waverider est conçu pour détecter une houle de fréquence comprise entre 0,03 et 1 Hz. La figure 6 représente la partie gain des diagrammes de Bode correspondant aux fonctions de transfert \underline{H} et \underline{H}_1 .

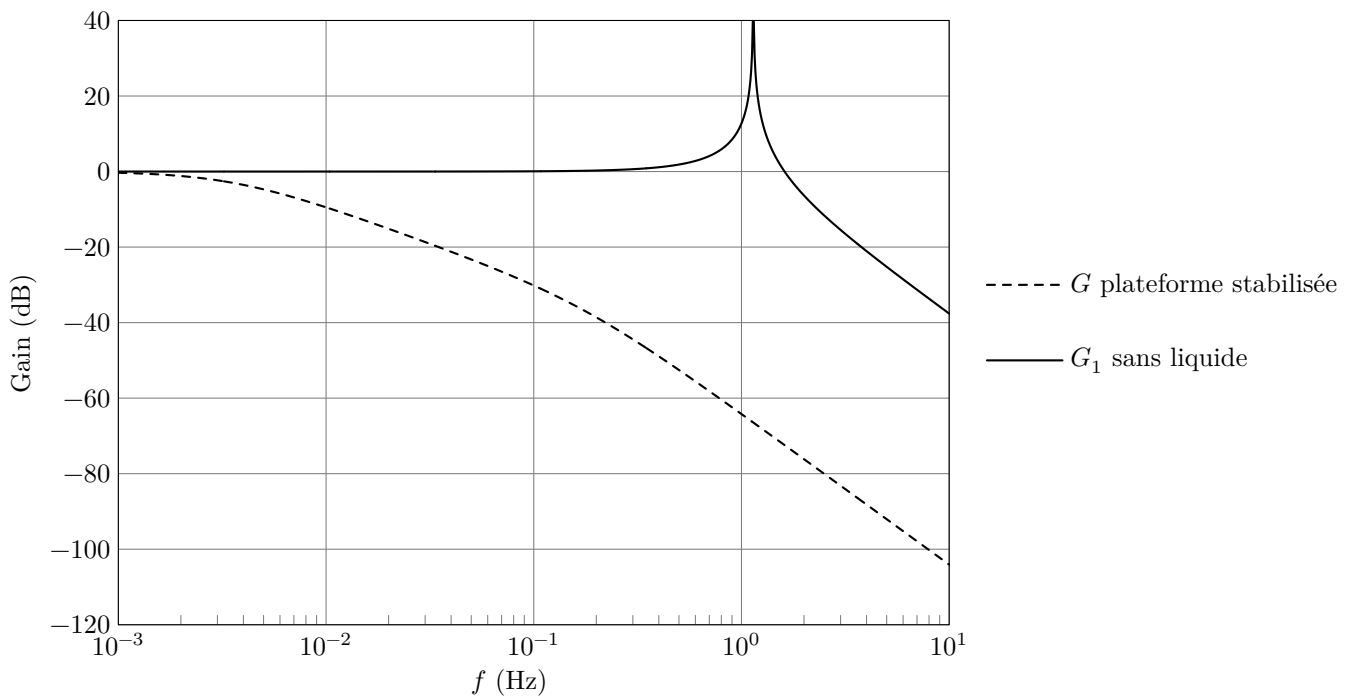


Figure 6 Diagrammes de Bode

Q 30. Commenter ces courbes. Quelle inclinaison maximale (en degrés) atteint-on si $a_0 = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$?

III Traitement du signal

L'accéléromètre fournit un signal analogique de tension U , pollué par du bruit dont les composantes spectrales de fréquence supérieure à 1 Hz nuisent aux mesures sans apporter aucune information sur l'état de la mer. On applique donc un filtrage analogique sur cette tension pour obtenir une tension U_s à exploiter.

Q 31. Parmi les trois types de filtres A, B et C représentés sur la figure 7, lequel convient ? Justifier la réponse.

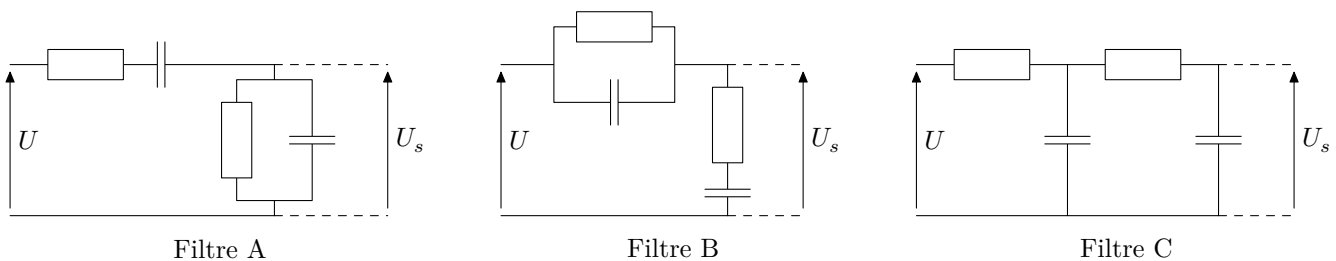


Figure 7 Exemples de filtre analogiques composés de résistors et de condensateurs

Q 32. Les deux résistors présentent la même résistance R et les deux condensateurs la même capacité C . Donner, en la justifiant, l'expression non simplifiée de la fonction de transfert $\underline{H}_F(j\omega)$ du filtre choisi, en fonction de R , C et $j\omega$.

Dans la suite, en admet que cette fonction se simplifie en

$$\underline{H}_F(j\omega) = \frac{1}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

Q 33. Quelles valeurs proposez-vous pour R et C ?

Certains modèles de Waverider ne sont pas munis d'un filtre analogique, mais seulement d'un filtre numérique. Le signal U fourni par l'accéléromètre est échantillonné à la fréquence de 10,24 Hz puis traité numériquement pour obtenir un signal filtré U_S . Soit $\{U_k, k \in \mathbb{N}\}$ les valeurs échantillonnées du signal et $\{U_{Sk}, k \in \mathbb{N}\}$ celles que l'on obtient à la sortie du filtre.

Q 34. Proposer un traitement numérique permettant de passer des $\{U_k\}$ aux $\{U_{Sk}\}$. Vous explicitez les opérations à effectuer et donnez la valeur numérique d'éventuelles constantes.

Après divers traitements, le signal final est échantillonné à la fréquence de 2,56 Hz. Toutes les 200 secondes, 512 échantillons sont envoyés à un microprocesseur qui calcule le spectre des hauteurs de vagues.

Q 35. Sur quel intervalle de fréquence convient-il d'afficher le spectre obtenu ?